

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală- clasa a VIII-a
Vaslui, 14 februarie 2026
Barem evaluare și de notare

*Fiecare problemă se punctează cu 22,5 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Punctajul maxim este de 100 de puncte.*

Problema 1

Dacă $a, b, c \in [4,5]$, arătați că

a) $2 \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq 2,05$.

b) $9 \leq (a + b + c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) < 9,15$.

Soluție și barem:

a) $(a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \dots\dots\dots 3p$

Cum $a, b \in [4,5] \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \forall a, b \in [4,5]$, cu egalitate pt $a=b \dots\dots\dots 2p$

Dacă $a, b \in [4,5] \Rightarrow 4 \leq a \leq 5$ și $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{4}{5} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{5}{4} \dots\dots\dots 2p$

$\left. \begin{matrix} 5a-4b \geq 0 \\ 5b-4a \geq 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow (5a - 4b)(5b - 4a) \geq 0 \dots\dots\dots 2p$

$20a^2 + 20b^2 \leq 41ab \dots\dots\dots 2p$

Cum $a, b \in [4,5] \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq \frac{41}{20} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq 2,05$,

cu egalitate pentru $a=4, b=5$ sau $a=5, b=4$ (*) $\dots\dots\dots 2p$

b) $(a + b + c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \dots\dots\dots 3p$

Din a) avem că $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2, \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$, prin adunare avem că

$(a + b + c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$, cu egalitate pentru $a=b=c \dots\dots\dots 3p$

Din a) și (*) avem că $(a + b + c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) < 9,15 \dots\dots\dots 3,5p$

Problema 2

- a) Arătați că numărul $a = 2\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{20 - 8\sqrt{6}} + 2\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ este natural.
- b) Fie x și y două numere reale astfel încât $5x + 7y = 12$. Aflați valoarea minimă a expresiei $5x^2 + 7y^2$.

Soluție și barem:

$$a) \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3}^2} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = |2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3} \dots\dots\dots 2,5p$$

$$\begin{aligned} \sqrt{20 - 8\sqrt{6}} &= \sqrt{4(5 - 2\sqrt{6})} = 2\sqrt{\sqrt{3}^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2}^2} = 2\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} = \\ &= 2|\sqrt{3} - \sqrt{2}| = 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} \dots\dots\dots 2,5p \end{aligned}$$

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 + 1} = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = |\sqrt{2} + 1| = \sqrt{2} + 1 \dots\dots\dots 2,5p$$

$$a = 2(2 - \sqrt{3}) + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 2(\sqrt{2} + 1)$$

$$a = 4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2 \Rightarrow a = 6 \in \mathbb{N} \dots\dots\dots 2,5p$$

$$b) 7y = 12 - 5x \Rightarrow y = \frac{12 - 5x}{7} \dots\dots\dots 2,5p$$

$$5x^2 + 7y^2 = 5x^2 + 7\left(\frac{12 - 5x}{7}\right)^2 = 5x^2 + 7 \cdot \frac{144 - 120x + 25x^2}{49} =$$

$$\frac{35x^2 + 144 - 120x + 25x^2}{7} = \frac{60x^2 - 120x + 60}{7} + \frac{84}{7} =$$

$$\frac{60}{7}(x^2 - 2x + 1) + 12 = \frac{60}{7}(x - 1)^2 + 12 \dots\dots\dots 7,5p$$

$$(x - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow \min(5x^2 + 7y^2) = 12 \dots\dots\dots 2,5p$$

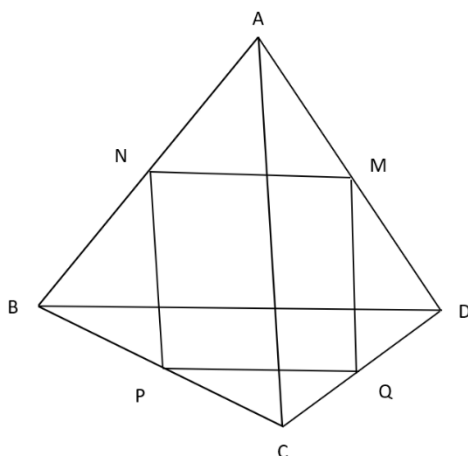
Problema 3

În tetraedrul ABCD notăm M, N, P, Q mijloacele muchiilor AD, AB, BC respectiv CD.

Se știe că $m\angle(AC, BD) = 90^\circ$.

- Arătați că $m\angle(MNP) = 90^\circ$.
- Arătați că, dacă $AC=BD$, atunci MNPQ este pătrat.

SGM 10/2025



Soluție și barem:

- $$\left. \begin{array}{l} \text{În } \triangle ABD, \text{ } M \text{ mijl. lui } AD \\ \text{ } N \text{ mijl. lui } AB \end{array} \right\} \Rightarrow MN = \text{linie mijlocie} \Rightarrow MN = \frac{DB}{2} \text{ și } MN \parallel DB \dots\dots\dots 3p$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{În } \triangle ABC, \text{ } N \text{ mijl. lui } AB \\ \text{ } P \text{ mijl. lui } BC \end{array} \right\} \Rightarrow NP = \text{linie mijlocie} \Rightarrow NP = \frac{AC}{2} \text{ și } NP \parallel AC \dots\dots\dots 3p$$

$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel DB \\ NP \parallel AC \end{array} \right\} \Rightarrow m\angle(MNP) = m\angle(MN, NP) = m\angle(BD, AC) = 90^\circ \dots\dots\dots 4,5p$$

- $$\left. \begin{array}{l} \text{În } \triangle BDC, \text{ } Q \text{ mijl. lui } DC \\ \text{ } P \text{ mijl. lui } BC \end{array} \right\} \Rightarrow PQ = \text{linie mijlocie} \Rightarrow PQ = \frac{DB}{2} \text{ și } PQ \parallel DB \dots\dots\dots 3p$$

$$\left. \begin{array}{l} PQ = \frac{DB}{2} \text{ și } PQ \parallel DB \\ MN = \frac{DB}{2} \text{ și } MN \parallel DB \end{array} \right\} \Rightarrow PQ = MN \text{ și } PQ \parallel MN \Rightarrow MNPQ \text{ paralelogram} \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Din } PQ = \frac{DB}{2}, NP = \frac{AC}{2} \text{ și } DB = AC \Rightarrow PQ = NP \dots\dots\dots 2p$$

$$MNPQ \text{ paralelogram și } PQ = NP \Rightarrow MNPQ \text{ romb} \dots\dots\dots 2p$$

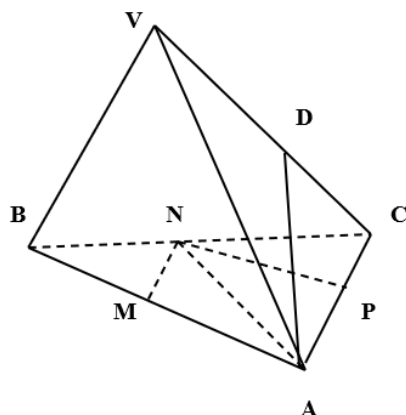
$$MNPQ \text{ romb și } m\angle(MNP) = 90^\circ \Rightarrow MNPQ \text{ pătrat} \dots\dots\dots 2p$$

Problema 4

Fie piramida triunghiulară $VABC$ cu $VA=AB$. Se iau punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$ și $P \in (AC)$ astfel încât $BM = CP$ și $\angle BNM \equiv \angle PNC \equiv \angle BAC$. Dacă (AD) este bisectoarea unghiului $\angle CAV$, $D \in (CV)$, arătați că:

- (AN) este bisectoarea unghiului $\angle BAC$;
- $BV \parallel (AND)$.

Soluție și barem:



a) (AD) bisectoarea $\angle CAV \xrightarrow{T.bis.} \frac{VD}{DC} = \frac{VA}{AC}$. Dar $VA = AB \Rightarrow \frac{VD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ 5p

$\triangle BNM \sim \triangle BAC \sim \triangle PNC$ și $BM = CP \Rightarrow \triangle BNM \equiv \triangle PNC \Rightarrow BN = NP$ și $MN = NC$5p

$\triangle BNM \sim \triangle BAC \Rightarrow \frac{BN}{AB} = \frac{NM}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BN}{MN} = \frac{BN}{NC} \xrightarrow{R. T. bis.} (AN \text{ este bisectoarea } \angle BAC)$ 5p

b) $\frac{BN}{NC} = \frac{AB}{AC}$ și $\frac{AB}{AC} = \frac{VD}{DC} \xrightarrow{R. T. Thales} ND \parallel BV$, dar $ND \subset (AND) \Rightarrow VB \parallel (AND)$ 7,5p